عنوان الكتاب : كتاب المبادئ والغايات فى أصول الهندسة والمساحات

المؤلـــــف : محمد أفندى ادريس

سنة النشـــر : ١٩٠١

رقم العهـــدة : ٣٩١٥

الـــ ACC : ٥١٤٠

عدد الصفحات : ٥٦

رقم الفيلـــم : ٤

كتاب

المبادى والغايات في أصول الهندسة والمساحات

تأليف

(محمد أفندى ادريس)

مدرس الرياضة بمدرسة المعلمين

الناصريه

(الطبعة الثانية)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحميه

سنة ١٣٢٠

هجريه

﴿ بسم الله الرحمن الرحيم ﴾

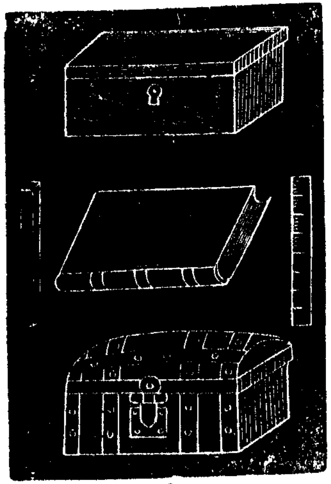
الحمد لله مبدئ نظام المخلوقات ومبدع أشكال الموجودات سبحانه من إله أودع فى زوايا الكائنات مايدل على وجوده من الحكم البينات جلت نعماؤه فلا يقدرها قياس وعظمت آلاؤه فلا يحصر محيطها أحد من الناس والصلاة والسلام على سيدنا محمد مركز دائرة الافضال وقطب الجلال والكمال وعلى آله وصحبه الذين جابوا الأقطار ورسموا فى مستوى الوجود طرق الاستبصار

﴿ أما بعد ﴾ فلما كان علم الهندسة من العلوم الجليلة المقدار لما فيه من إنارة العقول واجادة الافكار وكنت ممن انتدب لتعليم العلوم الرياضية للطلبة الازهريه ورأيت أن ماهم مشغولون به من العلوم الشرعيه له عن التبحر فى الرياضة الاولية أردت أن أجمع لهم مختصرا يعرفون منه مبادى الهندسة وغاياتها كتعريف

الاشكال وأخذ مساحاتها بطريقة عمليه تاركا البراهين النظريه وان كانت تلك البراهين هى الاصل فى استنارة الافكار لما فيها من دقة النظر والاعتبار ولكن لكل مقام مقال ولكل مجال رجال فجاء بحمد الله وفق المرام فى هذا المقام وهو وان صغر حجمه فقد كثر علمه لما فيه من جليل المزايا فكم فى الزوايا من خبايا وسميته ﴿ المبادى والغايات فى أصول الهندسة والمساحات ﴾ والله الكريم أسأل وبنبيه الهادى أتوسل أن ينفع به الطلاب وأن يحضنى بقبوله أجزل ثواب وأن يجعله وفق ماطلبه ورسمه حضرة الاستاذ الاكبر شيخ الجامع الازهر مولانا صاحب الفضيلة الشيخ حسونه النواوى بلغه الله أمنيته وحقق رغبته فى ظل من نالت العلوم بحسن عنايته الأمانى أفندينا المعظم ﴿ عباس باشا حلمى الثانى ﴾ أيد الله دولته وأعلى كلمته وحفظ ذاته الكريمه وأدام عواطفه الرحيمه آمين

تعاريف أوّلية

(١) الجسم هو ماشغل جزأمن الفراغ كصندوق ـ وكتاب ومسطرة (شكل ١)



(ش ١)

(٢) للجسم ثلاثة أبعاد وهى الطول والعرض والسمك وقد يسمى أحد هذه الابعاد ارتفاعا أو عمقا على حسب مقتضيات الاحوال

(٣) حجم الجسم هو المحل الذى يشغله من الفراغ

فالمحل الذى يشغله الصندوق يسمى حجما له

(٤) السطح هو ماامتدّ طولا وعرضا وهو نهاية الجسم فكل وجه من أوجه الصندوق يسمى سطحا

(٥) الخط ماامتد طولا فقط وهو محل تقاطع سطحين فتقاطع كل وجهين من أوجه الصندوق يسمى خطا

(٦) النقطة لاامتداد لها وهى محل تقاطع خطين فتقاطع أىّ خطين من أحرف الصندوق يسمى نقطة

(٧) الاشكال ـ تطلق الاشكال على كل من الخطوط والسطوح والجسوم

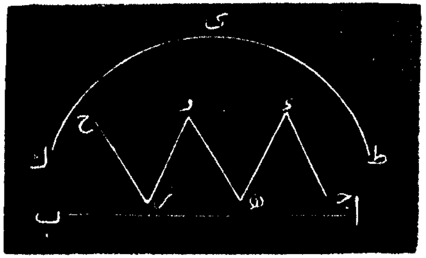
(٨) الهندسة هى علم يبحث فيه عن الاشكال وخواصها وقياس السطوح والاجسام (١)

(أنواع الخط)

(٩) أنواع الخط ثلاثة مستقيم ومنكسر ومنحن

(١٠) الخط المستقيم هو أقرب بعد بين نقطتين مثل الخط أ ب (شكل ٢)

(١١) الخط المنكسر هو ماتركب من خطوط مستقيمة ليست على استقامة واحدة مثل الخط ح ء هـ و ز ع (شكل ٢)



(ش ٢)

(١٢) الخط المنحنى هو ماليس مستقيما ولامنكسرا مثل الخط ط ى ك (شكل ٢)

(١) اعلم أنه يتوصل الى معرفة خواص الاشكال وقياس السطوح والاجسام ببراهين نظرية ودراسة علم الهندسة على هذه الطريقة تسمى بالهندسة النظرية

وفى هذا المختصر نقتصر على تعريف الاشكال وذكر بعض خواصها وبيان كيفية تقدير السطوح والاجسام كل ذلك بدون براهين تسهيلا على المبتدئين

(أنواع السطح)

(١٣) السطح نوعان مستو ومنحن

(١٤) السطح المستوى هو سطح يمكن أن ينطبق عليه المستقيم انطباقا تاما فى جميع جهاته (وقد يطلق عليه مستو فقط)

مثل سطح قطعة من الرخام وسطح لوح زجاج وسطح الماء الراكد

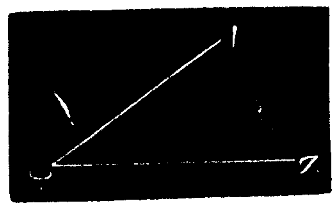
(١٥) السطح المنحنى هو سطح لا ينطبق عليه المستقيم انطباقا تاما فى جميع جهاته

مثل سطح البرتقانة وسطح كوز الماء وسطح القلم

فسطح البرتقانة لا ينطبق عليه المستقيم فى أى جهة من جهاته أما سطح كوز الماء وسطح القلم فالمستقيم ينطبق على كل منهما فى بعض الجهات دون البعض

الزاوية

(١٦) الزاوية هى الانفراج بين مستقيمين متقاطعين فى نقطة مثل الزاوية ا ب ح (شكل ٣) فالنقطة ب تسمى رأس الزاوية والمستقيمان ا ب ، ب ح يسميان ضلعيها



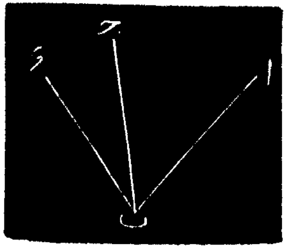
(ش ٣)

ملحوظة لا يتعلق مقدار الزاوية بطول الضلعين ولا بقصرهما فاذا مد الضلعان ا ب ، ب ح أو قصرا فلا تتغير الزاوية وانما تتغير بتباعد الضلعين أو تقاربهما

فبتباعدهما تكبر الزاوية وبتقاربهما تصغر

(١٧) قراءة الزاوية — تقرأ الزاوية اما بحرف الرأس فقط أو بثلاثة حروف بشرط أن يكون حرف الرأس فى الوسط فالزاوية السابقة شكل ٣ تقرأ هكذا زاوية ب أو زاوية ا ب ح واذا اشترك زاويتان أو عدة زوايا فى رأس واحد فيلزم قراءة كل منها بثلاثة أحرف

فالزاوية التى بين المستقيمين ا ب ، ب ح (شكل ٤) تقرأ ا ب ح والتى بين المستقيمين ب ح ، ح ء تقرأ ح ب ء والتى بين ا ب ، ب ء تقرأ ا ب ء



(ش ٤)

(١٨) يقال ان الزاوية مساوية لزاوية أخرى اذا أمكن انطباقها عليها بمعنى أنه اذا وضع رأس احداهما على رأس الاخرى وطبق أحد ضلعيها على أحد ضلعى الاخرى ينطبق الضلع الثانى من الاولى على الضلع الثانى من الثانية ولا نظر لتفاوت الاضلاع طولا

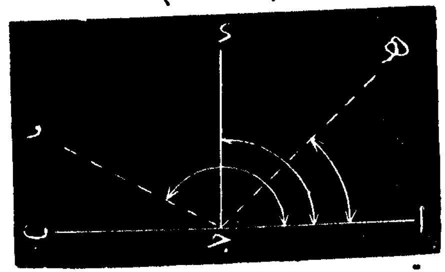
(١٩) الزاويتان المتجاورتان هما اللتان رأسهما واحد وبينهما ضلع متوسط مشترك مثل الزاويتين ا ب ح ، ح ب ء (شكل ٤)

(٢٠) أنواع الزاوية ثلاثة قائمة وحادة ومنفرجة

(٢١) الزاوية القائمة هى احدى الزاويتين المتجاورتين المتساويتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر

مثل الزاوية ا حـ ء والزاوية ء حـ ب (شكل ٥)

(٢٢) الزاوية الحادة هى ما كانت أصغر من الزاوية القائمة مثل الزاوية ا حـ هـ (شكل ٥)



(ش ٥)

(٢٣) الزاوية المنفرجة هى ما كانت أكبر من الزاوية القائمة مثل الزاوية ا حـ و (شكل ٥)

(٢٤) الزاويتان المتممتان لبعضهما هما اللتان مجموعهما يساوى قائمة مثل الزاويتين ا حـ هـ ، هـ حـ ء (شكل ٥)

(٢٥) الزاويتان المكملتان لبعضهما هما اللتان مجموعهما يساوى قائمتين مثل الزاويتين ا حـ هـ ، هـ حـ ب (شكل ٥)

الخطوط المتعامدة

(٢٦) العمود هو مستقيم تقابل مع مستقيم آخر وكون معه زاويتين متجاورتين متساويتين

مثل المستقيم حـ ء بالنسبة للمستقيم ا ب (شكل ٥)

وكما أن المستقيم حـ ء عمود على ا ب كذلك المستقيم ا ب عمود على حـ ء

(٢٧) المائل هو مستقيم تقابل مع مستقيم آخر وكون معه

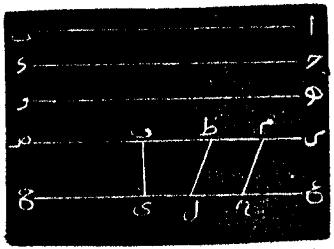
زاويتين متجاورتين غير متساويتين مثل المستقيم هـ حـ بالنسبة للمستقيم ا ب (شكل ٥)

(٢٨) البعد بين نقطة ومستقيم يقدّر بالعمود النازل منها عليه فالبعد بين نقطة ء ومستقيم ا ب يقدر بالعمود حـ ء (شكل ٥)

الخطوط المتوازية

(٢٩) الخطوط المتوازية هى خطوط مستقيمة موجودة فى مستو واحد ولا تتلاقى أبدا مهما امتدت

مثل الخطوط ا ب ، حـ ء ، هـ و (شكل ٦)



(٣٠) المستقيمات المتوازية المحصورة بين مستقيمين متوازيين تكون متساوية (ش ٦)

فالمستقيمان المتوازيان م ن ، ط ل المحصوران بين المستقيمين المتوازيين س ص ، ع ح شكل ٦ متساويان

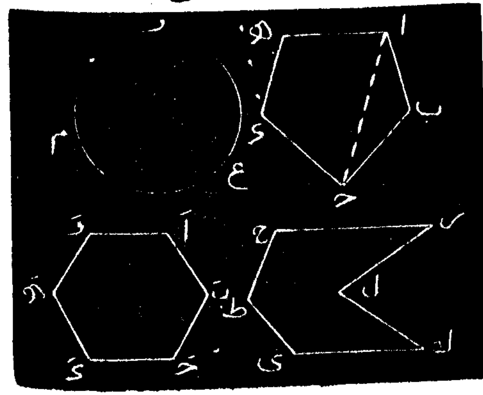
(٣١) البعد بين مستقيمين متوازيين يقدر بالمستقيم المحصور بينهما العمودى عليهما

فالبعد بين المستقيمين س ص ، ع ح شكل ٦ يقدر بالعمود ف ى المحصور بينهما

(الاشكال المستوية)

(٣٢) الشكل المستوى هو سطح مستو محاط من جميع جهاته بخط أو جملة خطوط مثل ا ب حـ ء هـ ، و ع م (شكل ٧)

(٣٣) المضلع هو شكل مستو محدود من جميع جهاته بخطوط مستقيمة
مثل ا ب ح ء هـ
و ز ح ط ى
ك ل (شكل ٧)
ومجموع الخطوط
المستقيمة ا ب
و ب ح الخ
يسمى محيط المضلع
والزوايا التى بينها



(ش ٧)

تسمى زوايا المضلع ورؤسها تسمى رؤس المضلع

(٣٤) قطر المضلع هو مستقيم واصل بين رأسى زاويتين غير متتاليتين من زواياه مثل المستقيم ا ح (شكل ٧)

(٣٥) المضلع يكون محدبا وغير محدب فالمحدب ما كان فى جهة واحدة بالنسبة لامتداد كل ضلع من أضلاعه وغير المحدب ماليس كذلك

مثلا فى شكل ٧ المضلع ا ب ح ء هـ محدب والمضلع ز ح ط ى ك ل غير محدب

(٣٦) المضلع المنتظم هو ما كانت أضلاعه متساوية وزواياه متساوية مثل المضلع اَ بَ حَ ءَ هَ وَ (شكل ٧)

(٣٧) اذا كان المضلع محدودا بثلاثة أضلاع يسمى مثلثا واذا

كان محدودا بأربعة أضلاع يسمى شكلا رباعيا (وهو جملة أنواع) واذا كان محدودا بخمسة أضلاع يسمى مخمسا أو بستة فسدس وهكذا فأبسطها المثلث

(مساحة الاشكال المستوية)

(٣٨) تمهيد قياس الشئ هو مقارنته بشئ من نوعه معلوم المقدار يسمى وحدة

فقياس الخطوط هو تقديرها بوحدة تختار من وحدات الاطوال كالذراع والمتر ومعرفة عدد مرات احتوائها على تلك الوحدة

وقياس السطوح هو تقديرها كذلك بوحدة السطوح ومعرفة عدد مرات احتوائها على تلك الوحدة

ووحدة السطوح هى مربع أى سطح ذو أربعة أضلاع كلها متساوية وزواياه قائمة وكل ضلع منها مساو لوحدة الاطوال

فاذا قيل ان مساحة قطعة أرض تساوى عشرين ذراعا دل ذلك على أنها قدر الوحدة السطحية (وهى فى هذا المثال الذراع المربع) عشرين مرة

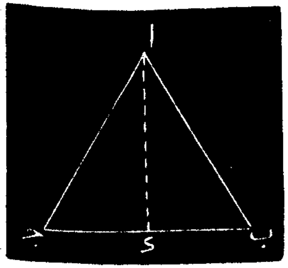
ولا صعوبة فى قياس الخطوط اذ يسهل تطبيق الوحدة الطولية عليها أما تقدير السطوح فيصعب تطبيق الوحدة السطحية عليها ولذا استنبط علماء الهندسة طرقا استعاضوا بها عن تطبيق الوحدة السطحية على نفس السطوح بقياس أبعاد خصوصية تختلف باختلاف الاشكال غالبا واجراء عمليات حسابية عليها وبذلك يتوصل للمساحة المطلوبة

ولنشرع فى بيان أنواع الاشكال المستوية وتعريف كل منها وطريقة ايجاد مساحته مبتدئين بالمثلث اذ هو أبسطها فنقول

(المثلث)

(٣٩) المثلث هو سطح مستو محاط بثلاثة خطوط مستقيمة متقاطعة مع بعضها مثنى

مثل المثلث ا ب ح (شكل ٨) فالمستقيمات ا ب ، ا ح ، ب ح تسمى أضلاع المثلث والزوايا ا ، ب ، ح هى زواياه ورؤسها هى رؤس المثلث



(ش ٨)

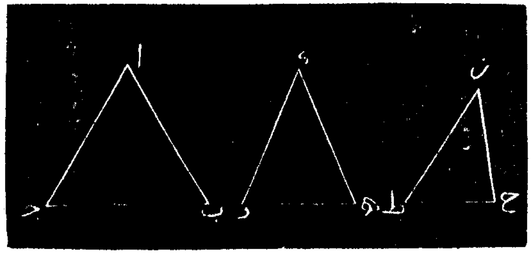
(٤٠) ارتفاع المثلث هو العمود النازل من أحد رؤسه على الضلع المقابل لها ويسمى قاعدة

مثل العمود ا ء (شكل ٨) وحينئذ فالضلع ب ح هو القاعدة

(٤١) ينقسم المثلث بالنظر لأضلاعه الى ثلاثة أنواع متساوى الاضلاع ومتساوى الساقين ومختلف الاضلاع وينقسم بالنظر لزواياه الى ثلاثة أنواع أيضا قائم الزاوية ومنفرج الزاوية وحاد الزوايا

(٤٢) المثلث المتساوى الاضلاع هوما كانت أضلاعه متساوية مثل المثلث ا ب ح (شكل ٩)

(٤٣) من خواص المثلث المتساوى الاضلاع أن زواياه متساوية فعلى هذا فى المثلث ا ب ح (شكل ٩) زاوية ا = ب = ح



(ش ٩)

(٤٤) المثلث المتساوى الساقين هوما كان فيه ضلعان متساويان يسميان بالساقين

مثل المثلث ء هـ و (شكل ٩) والضلعان ء هـ ، ء و هما الساقان

﴿تنبيه﴾ يعتبر عادة فى المثلث المتساوى الساقين أن مادون الساقين قاعدة له مثلا فى المثلث ء هـ و (شكل ٩) الضلع هـ و يعتبر قاعدة

(٤٥) من خواص المثلث المتساوى الساقين أن الزاويتين المقابلتين للساقين متساويتان

فالزاويتان هـ ، و (شكل ٩) متساويتان

ومن خواصه أيضا أن ارتفاعه النازل من الرأس ء يمر بوسط القاعدة وينصف زاوية الرأس ء

(٤٦) المثلث المختلف الاضلاع هوما كانت أضلاعه مختلفة

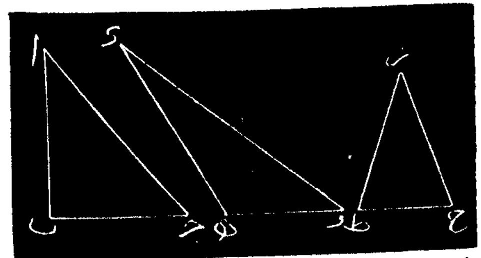
مثل المثلث ز ح ط شكل ٩

(٤٧) المثلث القائم الزاوية هوما كانت احدى زواياه قائمة والضلع المقابل لها يسمى وتر القائمة

مثل المثلث ا ب ح (شكل ١٠)

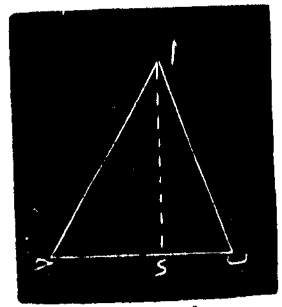
(٤٨) المثلث المنفرج الزاوية هو ما كانت احدى زواياه منفرجة مثل المثلث د هـ و (شكل ١٠)

(٤٩) المثلث الحاد الزوايا هو ما كانت جميع زواياه حادة مثل المثلث م ع ط (شكل ١٠)



(ش ١٠)

(٥٠) مساحة المثلث تساوى نصف الحاصل من ضرب قاعدته فى ارتفاعه



(ش ١١)

فمساحة المثلث ا ب حـ (شكل ١١) تساوى $\frac{\text{ب حـ} \times \text{ا د}}{٢}$

فاذا فرض أن ب حـ = ٢٣ متر و ا د = ٢٥ م كانت مساحة المثلث ا ب حـ = $\frac{٢٣ \times ٢٥}{٢}$ = ٢٨٧٫٥ مترا مربعا

اذا رمز لقاعدة المثلث بحرف ق ولارتفاعه بحرف ع ولسطحه بحرف س يكون س = $\frac{\text{ق} \times \text{ع}}{٢}$ أو $\text{ق} \frac{\text{ع}}{٢}$ (١)

ملحوظة حيث إن نصف حاصل الضرب يساوى حاصل ضرب نصف أحد العاملين فى العامل الثانى فيقال ان مساحة المثلث تساوى حاصل ضرب القاعدة فى نصف الارتفاع أو حاصل ضرب نصف القاعدة فى الارتفاع

اذا كان المثلث متساوى الاضلاع فيمكن ايجاد مساحته بعد معرفة ضلعه بالطريقة الآتية

(٥١) مساحة المثلث المتساوى الاضلاع تساوى ربع مربع ضلعه فى جذر ٣ وهو ١٫٧٣٢ تقريبا

فمساحة المثلث المتساوى الاضلاع ا ب حـ (شكل ٩) تساوى $\frac{\text{ب حـ}^{٢}}{٤} \times ١٫٧٣٢$

واذا فرض أن طول الضلع ب حـ = ١٢ متر يكون

ا ب حـ = $\frac{١٢^{٢}}{٤} \times ١٫٧٣٢ = ٣٦ \times ١٫٧٣٢ = ٦٢٫٣٥٢$

واذا رمز لضلع المثلث المتساوى الاضلاع بحرف حـ ولسطحه بحرف س يكون

$\text{س} = \frac{\text{حـ}^{٢}}{٤} \sqrt{٣}$ (٢)

(تمرينات)

(١) ما مساحة المثلث الذى قاعدته ٤٨ متر وارتفاعه ٣٥ متر

(٢) ما مساحة مثلث متساوى الاضلاع ضلعه ٥ متر

(٣) ما مساحة مثلث قائم الزاوية ضلعا قائمته ٦ و ٨ متر

(٤) ما ارتفاع مثلث مساحته ٢٠٠ متر مربع وقاعدته ٢٥ مترا

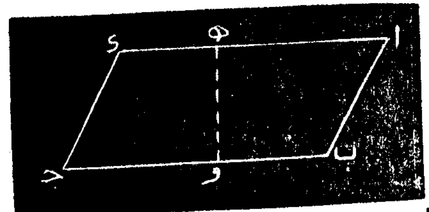
(٥) ما طول قاعدة مثلث اذا كان ارتفاعه ٢٦ ذراعا ومساحته ٤٨٧٫٥ ذراعا مربعا

(الشكل الرباعى)

(٥٢) يتميز من الشكل الرباعى أنواع وهى متوازى الاضلاع والمستطيل والمربع والمعين وشبه المنحرف

(متوازى الاضلاع)

(٥٣) متوازى الاضلاع هو شكل رباعى أضلاعه المتقابلة متوازية



مثاله متوازى الاضلاع ا ب حـ ء (شكل ٢)

(٥٤) ارتفاع متوازى الاضلاع هو العمود النازل من نقطة من أحد أضلاعه على الضلع المقابل له وحينئذ فكل واحد من هذين الضلعين يعتبر قاعدة له

(ش ١٢)

مثل المستقيم هـ و (شكل ١٢) وحينئذ فالضلع ب حـ هو القاعدة

(٥٥) من خواص متوازى الاضلاع أن أضلاعه المتقابلة متساوية وزواياه المتقابلة متساوية

فى متوازى الاضلاع ا ب حـ ء شكل ١٢ يكون ا ب = حـ ء ، ا ء = ب حـ ، ا = حـ ، ب = ء

(٥٦) مساحة متوازى الاضلاع تساوى حاصل ضرب القاعدة فى الارتفاع فمساحة متوازى الاضلاع ا ب حـ ء (شكل ١٢) تساوى ب حـ × هـ و

وإذا فرض أن ب حـ = ١٢٫٥ م ، هـ و = ٧٫٥ م فيكون سطح ا ب حـ ء = ١٢٫٥ × ٧٫٥ = ٩٣٫٧٥ مترا مربعا

وإذا رمز لقاعدة متوازى الاضلاع بحرف ن ولارتفاعه بحرف ع

ولسطحه بحرف س يحدث القانون س = ن ع (٣)

(تمرينات)

(١) ما مساحة متوازى الاضلاع الذى قاعدته ٢٤٫٧٥ م وارتفاعه نصف قاعدته

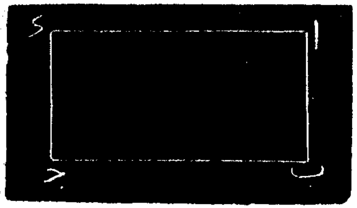
(٢) ما ارتفاع متوازى الاضلاع الذى مساحته ٢٦٨٨ مم وقاعدته ٥٦ م

(٣) ما قاعدة متوازى الاضلاع الذى مساحته ٢٦١٢ مم وارتفاعه ٤٨ م

(المستطيل)

(٥٧) المستطيل هو متوازى أضلاع زواياه قائمة

مثاله المستطيل ا ب حـ ء (شكل ١٣)



(ش ١٣)

وبناء على ما تقدم (بنمرة ٥٥) تكون أضلاعه المتقابلة متساوية

أى ضلع من أضلاعه يعتبر قاعدة والضلع المجاور له ارتفاعا

(٥٨) مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه فمساحة المستطيل ا ب حـ ء (شكل ١٣) تساوى ب حـ × ا ب

وإذا فرض أن ب حـ = ١٤ مترا ، ا ب = ٦٫٢٥ أمتار يكون ا ب حـ ء = ١٤ × ٦٫٢٥ = ٨٧٫٥ مترا مربعا

اذا رمز للقاعدة بحرف ں وللارتفاع بحرف ع وللمساحة بحرف س يكون

س = ں × ع (٤)

(تمرينات)

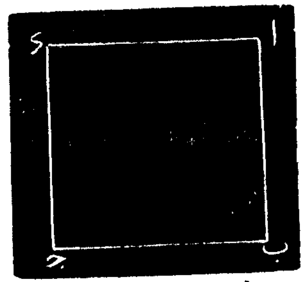
(١) قاعة مستطيلة الشكل طولها ١٨ ذراعا وعرضها ١٥ ذراعا يراد فرشها بحصيرة ما ثمن الحصيرة اذا كان ثمن الذراع ٧٫٥ مليمات

(٢) كم ذراعا من البفتة التى عرضها ١٫٥ ذراعا تلزم لبطانة ١٨ ذراعا من الحرير الذى عرضه ذراع واحد

(٣) كم مترا من بساط عرضه ٠٫٦٥ متر تلزم لفرش حجرة مستطيلة الشكل طولها ٥٫٥ أمتار وعرضها ٣٫٢٥ أمتار

(المربع)

(٥٩) المربع هو ما كانت أضلاعه متساوية وزواياه قائمة مثل المربع ا ب ح ء (شكل ١٤) وهو عبارة عن مستطيل أضلاعه متساوية



(ش ١٤)

(٦٠) مساحة المربع تساوى حاصل ضرب ضلعه فى نفسه أى تساوى مربع ضلعه

فمساحة المربع ا ب ح ء (شكل ١٤) تساوى ا ب × ا ب = ا ب^{٢}

واذا فرض أن ا ب = ٩ أمتار فيكون ا ب ح ء = ٩^{٢} = ٨١ مترا مربعا

اذا رمز لضلع المربع بحرف م ولسطحه بحرف س يكون

س = م^{٢} (٥)

(تمرينات)

(١) ما مقدار محيط المربع الذى ضلعه ٦٫٢٥ أمتار وما مقدار سطحه

(٢) حجرة مربعة الشكل ضلعها ٥ أمتار يراد فرشها ببساط ثمن المتر المربع منه ٨٫٥ فرنكات ما ثمن البساط

(٣) قاعة مربعة الشكل ضلعها ٤٫٣٢ أمتار يراد تبليطها ببلاط مربع ضلع الواحدة منه ٠٫٥٤ م فكم بلاطة تلزم لذلك

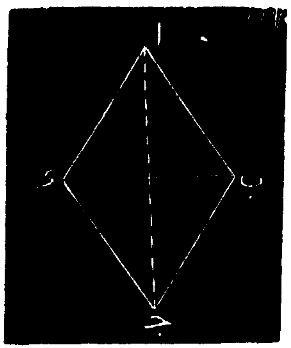
(المعين)

(٦١) المعين هو متوازى أضلاع أضلاعه متساوية مثل ا ب ح ء (شكل ١٥)

(٦٢) من خواص المعين أن قطريه متعامدان

(٦٣) مساحة المعين تساوى نصف حاصل ضرب قطريه فى بعضهما فمساحة المعين ا ب ح ء (شكل ١٥) تساوى $\frac{\text{ا ح} \times \text{ب ء}}{٢}$

واذا فرض أن ا ح = ١٨ مترا و ب ء = ١٠ أمتار يكون



(ش ١٥)

ا ب ح ء = $\frac{١٨ \times ١٠}{٢}$ = ٩٠ مترا

اذا رمز لاحد القطرين بحرف ن والآخر بحرف نَ ولسطحه بحرف س يكون س = $\frac{\text{ن} \times \text{نَ}}{٢}$ (٦)

(تمرينات)

(١) مامساحة المعين الذى قطراه ٥٠ مترا و٦٠ مترا

(٢) معين قطراه ٦ أمتار و ٨ أمتار ومعين آخر كل من قطريه ضعف كل من قطرى الاول فعلى كم مترمربع يحتوى الثانى زيادة عن الاول

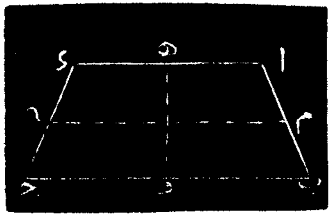
(٣) ماطول أحد قطرى معين مساحته ١٠٨٠٠ مترا مربعا وقطره الثانى ١٣٥

(شبه المنحرف)

(٦٤) شبه المنحرف هو شكل رباعى فيه ضلعان متوازيان فقط يسميان قاعدتيه

مثاله شبه المنحرف ا ب ح ء (شكل ١٦)

والضلعان المتوازيان ا ء ، ب ح هما قاعدتاه



(ش ١٦)

(٦٥) ارتفاع شبه المنحرف هو العمود النازل من نقطة من احدى قاعدتيه على الاخرى

مثل المستقيم هـ و (شكل ١٦)

(٦٦) المستقيم الواصل بين منتصفى الضلعين غير المتوازيين من شبه المنحرف يسمى قاعدته المتوسطة

مثل المستقيم م ن (شكل ١٦)

(٦٧) مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب نصف مجموع قاعدتيه فى الارتفاع

فمساحة شبه المنحرف ا ب ح ء (شكل ١٦) تساوى

$\frac{\text{اء} + \text{ب ح}}{٢}$ × هـ و

واذا كان ا ء = ٨٠ مترا ، ب ح = ١٢٠ مترا ، هـ و = ٥٠ مترا يكون

ا ب ح ء = $\frac{١٢٠ + ٨٠}{٢}$ × ٥٠ = ٥٠٠٠ مترا مربعا

واذا رمز لاحدى القاعدتين بحرف ن والاخرى بحرف نَ وللارتفاع بحرف ع ولسطحه بحرف س يكون

س = $\frac{\text{ن} + \text{نَ}}{٢}$ × ع (٧)

(٦٨) مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب القاعدة المتوسطة فى الارتفاع

فمساحة شبه المنحرف ا ب ح ء (شكل ١٦) تساوى

م ن × هـ و

واذا فرض أن م ن = ١٠٠ متر ، هـ و = ٥٠ م يكون

ا ب ح ء = ١٠٠ × ٥٠ = ٥٠٠٠ مترا مربعا

اذا رمز للقاعدة المتوسطة بحرف ن وللارتفاع بحرف ع ولسطحه بحرف س يكون س = ن ع (٨)

(تمرينات)

(١) مامساحة شبه المنحرف اذا كان طول احدى قاعدتيه ٢٠٠ قصبة وطول الاخرى يزيد عنها بمقدار خمسها وارتفاعه عشر مجموع قاعدتيه

(٢) ماالبعد بين قاعدتى شبه منحرف اذا كانت مساحته ٢٩٢٥ مترا مربعا وطول احدى قاعدتيه ٢٠٠ متر وطول الاخرى أربعة أخماسها

(٣) قطعة أرض على شكل شبه منحرف قاعدته المتوسطة ٨٧٫٥ قصبة والبعد بين قاعدتيه ١٦٫٥ قصبة فما مقدار مساحته

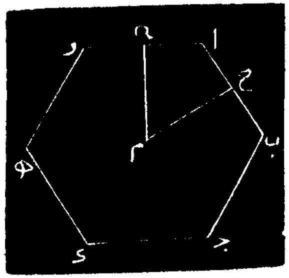
(المضلع)

(٦٩) تقدم بنمرة ٢٣ تعريف المضلع على وجه العموم وبنمرة ٣٦ تعريف المضلع المنتظم وسنبين كيفية ايجاد مساحة المضلع المنتظم ثم مساحة المضلع على وجه العموم وقبل الكلام على ذلك نذكر بعض أشياء تتعلق بالمضلع المنتظم فنقول

(٧٠) اذا أقيم عمودان على ضلعين غير متوازيين من أضلاع شكل منتظم من منتصفيهما فنقطة تقاطعهما تسمى مركز المضلع المنتظم

فاذا أقيم العمودان ع م ، ن م

على الضلعين ا ب ، ا و غير المتوازيين من المضلع المنتظم ا ب ح د ه و (شكل ١٧) فنقطة تقاطعهما م تسمى مركز المضلع المنتظم



(ش ٧)

(٧١) مساحة المضلع المنتظم تساوى حاصل ضرب محيطه فى نصف العمود النازل من مركزه على أحد أضلاعه فمساحة المضلع المنتظم ا ب ح د ه و (شكل ١٧) تساوى حاصل ضرب محيطه (أى مجموع أضلاعه) فى نصف العمود م ن

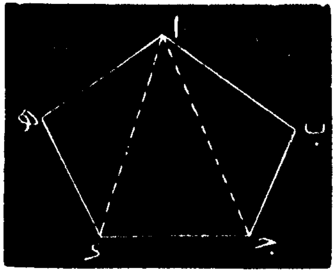
فاذا فرض أن طول كل من أضلاعه ٥ أمتار وأن طول م ن = ٤٫٣٣ م فتكون مساحة

ا ب ح د ه و = $\frac{\text{٦×٥×٤٫٣٣}}{\text{٢}}$ = ٦٤٫٩٥ مترا مربعا

واذا رمز لعدد أضلاع المضلع المنتظم بحرف ن ولضلعه بحرف ح وللعمود النازل من مركزه على أحد أضلاعه بحرف ع ولمساحته بحرف س فيكون س = $\frac{\text{ن ح ع}}{\text{٢}}$ (٩)

(٧٢) لايجاد مساحة أىّ مضلع على وجه العموم نصل أقطاره من رأس واحد فبذلك ينقسم الى مثلثات ثم نأخذ مساحة كل مثلث على حدته ونجمع مساحات هذه المثلثات فيكون المجموع هو مساحة المضلع

فلايجاد مساحة المضلع ا ب حـ ء هـ (شكل ١٨) نصل أقطاره من الرأس حـ فينقسم الى ثلاثة مثلثات مجموع مساحاتها هو مساحة المضلع



فاذا فرض أن مساحة المثلث

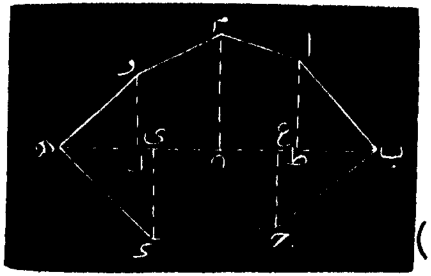
ا ب حـ = ١٤٠ مترا مربعا

والمثلث ا حـ ء = ٢٦٠ مترا مربعا

(ش ١٨)

والمثلث ا هـ ء = ١٦٨ مترا مربعا تكون مساحة المضلع ا ب حـ ء هـ تساوى مجموعها أى ٥٦٨ مترا مربعا

(٧٣) طريقة أخرى - لايجاد مساحة المضلع نمد أحد أقطاره ثم ننزل أعمدة عليه من باقى الرؤس فينقسم المضلع الى مثلثات قائمة الزوايا والى أشباه منحرف ثم نأخذ مساحة كل منها ونجمع هذه المساحات فيكون مجموعها هو مساحة المضلع



(ش ١٩)

فلايجاد مساحة المضلع ا ب حـ ء هـ و م (شكل ١٩) نمد القطر ب هـ وننزل من باقى الرؤس أعمدة عليه فينقسم الشكل الى مثلثات قائمة الزاوية ا ب ط ، ب حـ ع ، هـ و ل ، هـ ى ء وأشباه منحرف

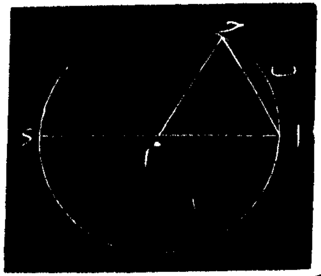
ا ط ن م ، م ن ل و ، ع حـ ء ى فمجموع مساحاتها هو مساحة المضلع المذكور

فاذا فرض أن مساحات المثلثات المذكورة هى على التوالى ٦٠ ، ٥٥ ، ٥٠ ، ٦٦ مترا مربعا ومساحة أشباه المنحرف هى على التوالى أيضا ١٣٥ ، ١٢٥ ، ١٧٦ مترا مربعا فان مساحة المضلع تساوى مجموعها أى ٦٦٧ مترا مربعا

الدائرة

(٧٤) الدائرة هى سطح مستو محاط بخط منحن جميع نقطه على أبعاد متساوية من نقطة داخله تسمى مركزا

مثلا فى (شكل ٢٠) السطح المستوى المحاط بالخط ا ب حـ ء هو الدائرة ونقطة م هى المركز والخط المنحنى المذكور يسمى المحيط



(ش ٢٠)

(٧٥) نصف القطر هو مستقيم واصل من المركز الى نقطة من المحيط مثل ا م (شكل ٢٠)

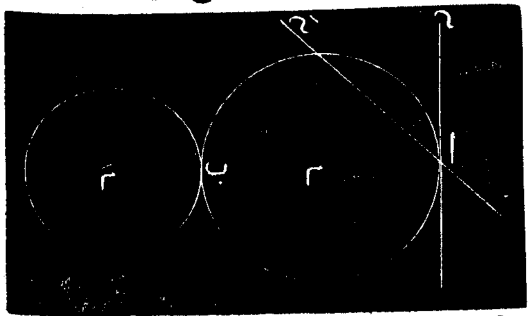
(٧٦) القطر هو مستقيم يمر بالمركز وينتهى بنقطتين من المحيط مثل ا ء (شكل ٢٠)

يؤخذ من تعريف الدائرة أن أنصاف الأقطار فى دائرة واحدة متساوية وكذلك الاقطار

(٧٧) القوس هو جزء من المحيط مثل ا ب حـ (شكل ٢٠)

(٧٨) الوتر هو مستقيم واصل بين نهايتى القوس مثل ا ح (شكل ٢٠)

(٧٩) قاطع الدائرة هو المستقيم الذى يقطع محيطها فى نقطتين مثل المستقيم ا نَ (ش ٢١)



(٨٠) المماس هو مستقيم مهما امتد لا يشترك مع المحيط الا فى نقطة واحدة تسمى نقطة التماس (ش ٢١)
مثل المستقيم ا ن (شكل ٢١)

(٨١) المحيطان المتماسان هما اللذان لايشتركان الا فى نقطة واحدة تسمى نقطة التماس

مثل المحيطين اللذين مركز أحدهما م والآخر مَ (شكل ٢١) ونقطة ب هى نقطة التماس

(٨٢) الشكل المرسوم على الدائرة هو ما كانت أضلاعه مماسة للمحيط ويقال ان الدائرة مرسومة داخل الشكل

(٨٣) الشكل المرسوم داخل الدائرة هو ما كانت رؤسه على المحيط ويقال إن الدائرة مرسومة عليه

(٨٤) تنبيه تقدم بنمرة ٣٦ تعريف المضلع المنتظم و بنمرة ٧٠ تعريف مركزه وبنمرة ٧١ كيفية ايجاد مساحته ومن خواص

مركز المضلع المنتظم أنها نقطة على أبعاد متساوية من جميع رؤسه وعلى أبعاد متساوية من أواسط جميع أضلاعه بمعنى أن الاعمدة النازلة منها على أضلاعه كلها متساوية وتمر بمنتصفات الاضلاع فالنقطة م (شكل ١٧) تكون على ابعاد متساوية من جميع الرؤس ا ، ب ، ح ، ء الخ وعلى أبعاد متساوية من أواسط الاضلاع أى من ع ، ن الخ

وحينئذ فهذه النقطة تكون مركزا لدائرة ترسم على المضلع ومركزا لدائرة أخرى ترسم داخله

ومن هنا يمكن أن يعبر عن مساحة المضلع المنتظم بما يأتى
مساحة المضلع المنتظم تساوى حاصل ضرب محيطه فى نصف نصف قطر الدائرة المرسومة داخله

تقدير طول المحيط ـــ ومساحة الدائرة

(٨٥) تمهيد ـ يوجد ارتباط بين محيط الدائرة وقطرها وهو أن المحيط يساوى ٣ر١٤ من أمثال القطر تقريبا وهذا المقدار يسمى النسبة التقريبية بين المحيط والقطر ويرمز لها عادة بحرف (ط) وقد يستعمل العدد ٣ر١٤١٦ مقدارا لهذه النسبة

(٨٦) طول محيط الدائرة يساوى حاصل ضرب القطر فى النسبة التقريبية

فاذا فرض أن قطر دائرة يساوى ١٥ مترا كان محيطها مساويا

٣ر١٤ × ١٥ = ٤٧ر١٠ م

اذا رمز لطول المحيط بحرف م ولنصف القطر بالرمز س فان القطر بتمامه يكون عبارة عن ٢ س واذن يكون طول المحيط = ط × ٢ س أو ٢ ط س أى م = ٢ ط س (١٠)

(٨٧) مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب النسبة التقريبية فى مربع نصف القطر

فاذا فرض أن نصف قطر الدائرة (شكل ٢٠) يساوى ٧٫٥ م فيكون سطحها يساوى ٣٫١٤ × ٧٫٥^{٢} = ١٧٦٫٦٢٥ مترا مربعا

واذا رمز لمساحة الدائرة بحرف سـ ولنصف قطرها بالرمز س فيكون

سـ = ط س^{٢} (١١)

(تمرينات)

(١) طول دائرة نصف النهار الارضية أربعون مليون متر — مامقدار نصف قطرها (الذى هو عبارة عن نصف قطر الارض)

(٢) بستان على شكل دائرة يخترقه طريق طوله ٥٠ مترا مار من وسطه فما طول محيط البستان

(٣) مامساحة البستان المذكور فى المسألة السابقة من بعد معرفة أن مساحة الجزء الذى يخترقه من الطريق ٣٠٠ متر مربع

(٤) مامساحة الدائرة التى طول محيطها ١٢٫٥٦ مترا

(٥) مامساحة السطح المحصور بين محيطى دائرتين متحدتى المركز نصف قطر احداهما متران ونصف قطر الاخرى متر

(تقسيم محيط الدائرة)

(٨٨) ينقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ جزأ متساوية كل منها يسمى درجة وتنقسم كذلك الدرجة الى ٦٠ دقيقة والدقيقة الى ٦٠ ثانية

ويرمز للدرجة بهذه العلامة (°) والدقيقة بهذه (′) وللثانية بهذه (″) ويكتب كل منها فوق العدد

فلبيان القوس الذى مقداره ستون درجة يكتب ٦٠°

ولبيان القوس الذى مقداره ثمان وعشرون درجة وأربع عشرة دقيقة وتسع ثوان يكتب ٩″ ١٤′ ٢٨°

۞ (تقدير الزوايا)

(٨٩) أى زاوية تقدر بدرج القوس المحصور بين ضلعيها المرسوم بجعل رأسها مركزا

فاذا فرض أن مقدار درج القوس ا ب ح (شكل ٢٠) ستون درجة فتكون زاوية ا م ح = ٦٠°

واذا فرض أن مقدار القوس ح ء = ١٢٠° فتكون زاوية ح م ء = ١٢٠°

(٩٠) مقدار الزاوية القائمة تسعون درجة

تقدير الزوايا ليس مقررا ببروجرام طلبة الازهر وانما أتينا به اتماما للفائدة ووضعنا قبله هذه العلامة ۞ لتميزه وهكذا كل ماوضع قبله هذه العلامة فهو غير مقرر

وذلك لانه اذا رسم قطران متعامدان فى دائرة فانه يحدث أربعة زوايا متساوية وكلها قوائم وحينئذ فالقوس المقابل لكل منها يكون ربع المحيط ومقداره ٩٠°

(٩١) ولاجل السهولة فى تقدير الزوايا يوجد آلة تسمى المنقلة (أوالرق) وهى عبارة عن نصف دائرة مقسم محيطها الى ١٨٠° وبواسطتها يمكن قياس أى زاوية على الورق

(٩٢) اذا قيست زوايا أى مثلث فان مجموعها يكون دائما مساويا الى ١٨٠° أى قائمتين

(٩٣) مقدار مجموع زوايا أى مضلع محدب يساوى من القوائم بقدر ضعف عدد أضلاعه ناقصا من ذلك أربعة

مثلا مجموع زوايا المخمس تساوى ٢ × ٥ − ٤ = ٦ قوائم

فاذا كان المضلع منتظما كان مقدار كل واحدة من زواياه يساوى من القوائم بقدر مجموعها مقسوما على عدد الزوايا

فزاوية المخمس المنتظم مثلا تساوى $\frac{٢ \times ٥ - ٤}{٥} = \frac{٦}{٥} = ١٠٨^\circ$

(تقدير طول قوس)

(٩٤) طول قوس معلوم عدد درجه ونصف قطره يساوى حاصل ضرب طول المحيط الذى هذا القوس جزء منه فى النسبة بين درج القوس و ٣٦٠ درجة

فاذا كان القوس ا ب ح (شكل ٢٠) يساوى ٦٠ درجة وفرض ان نصف قطره ٥ أمتار يكون ا ب ح = $\frac{٢ \times ٣٫١٤ \times ٥ \times ٦٠}{٣٦٠}$ = ٥٫٢٣٣ أمتار

واذا رمز لعدد درج القوس بالحرف ى والنصف قطره بالرمز س والطوله بحرف ح يكون ح = $\frac{\text{٢ط س ى}}{٣٦٠}$ (١٢)

(تمرينات)

(١) ماطول قوس مقداره ٤٨° ونصف قطره ٢٥ متر

(٢) على كم درجة يشتمل قوس طوله متران فى دائرة نصف قطرها متر

(٣) مدينتان على خط نصف نهار واحد والبعد بينهما ٤° فما يكون البعد بينهما مقدرا بالكيلو متر من بعد معرفة أن دائرة نصف النهار أربعون مليون متر

(قطاع الدائرة)

(٩٥) قطاع الدائرة هو جزء من سطح الدائرة محصور بين قوس ونصفى قطرين واصلين الى نهايتى القوس

مثاله القطاع ا م ح (شكل ٢٠)

(٩٦) مساحة القطاع تساوى حاصل ضرب طول قوسه فى نصف نصف قطره

فاذا كان طول القوس ا ح = ٥٫٢٣٣ ونصف قطره خمسة أمتار يكون القطاع ا م ح = ٥٫٢٣٣ × ٢٫٥ = ١٣٫٠٨٢٥ مترا مربعا

واذا رمز لطول القوس بحرف ح ولنصف القطر بالرمز س ولمساحة القطاع بحرف سـ يكون سـ = $\frac{\text{ح س}}{٢}$ (١٣)

تمرينات

(١) مامساحة القطاع الذى قوسه ٢٠،٠٩٦ ونصف قطره ١٦ مترا

(٢) مامساحة القطاع الذى قوسه ١٢٠° ونصف قطره ١٨ مترا

(٣) اذا كانت مساحة القطاع = ٦،٥٤٢ مترا مربعا وطول قوسه ٢،٦١١٥ م فما مساحة الدائرة

قطعة الدائرة

(٩٧) قطعة الدائرة هى جزء من سطح الدائرة محصور بين قوس ووتره

مثل القطعة ا ب ح المحصورة بين القوس ا ب ح والوتر ا ح (شكل ٢٠)

(٩٨) سطح القطعة يساوى الفرق بين مساحة القطاع الذى قوسه قوسها والمثلث الذى أضلاعه وتر هذا القوس ونصفى القطرين

فمساحة القطعة ا ب ح (شكل ٢٠) تساوى سطح القطاع ا م ح ناقصا سطح المثلث ا م ح

فاذا فرض أن نصف القطر ا م = ٥ أمتار والقوس ا ح يساوى ٦٠° والوتر ا ب = ٥ أمتار وارتفاع المثلث ا م ح أعنى م ء = ٤،٣٣ م فيكون سطح القطاع = ١٣،٠٨٢٥ وسطح المثلث يساوى ١٠،٨٢٥ وتكون مساحة القطعة تساوى

١٣،٠٨٢٥ – ١٠،٨٢٥ = ٢،٢٥٧٥ مترا مربعا

(تمرينات)

(١) مامساحة القطعة التى مقدار قوسها ٦٠° وطول كل من وترها ونصف قطرها ١٠ أمتار

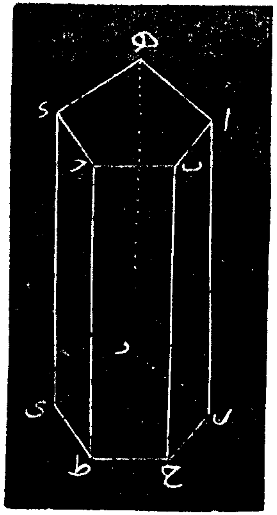
(٢) مامساحة القطعة التى مقدار قوسها ٣٦° درجة وطول وترها ٦،١٨ أمتار ونصف القطر عشرة أمتار وبعد المركز عن الوتر ٩،٥١ أمتار

(فى الاجسام)

(٩٩) كثير السطوح هو جسم محاط من جميع جهاته بسطوح مستوية وهذه السطوح تسمى أوجهه مثاله كثير السطوح ا ب ح ء ه و ز ح ط ى (شكل ٢٢)

(١٠٠) ضلع كثير السطوح أو حرفه هو مستقيم تقاطع أىّ وجهين متجاورين

مثل المستقيم ه و (شكل ٢٢)



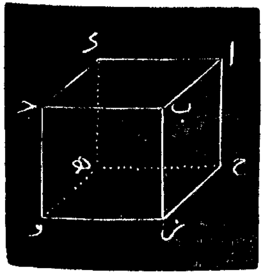
(ش ٢٢)

(مساحة الاجسام)

(١٠١) تقدم بنمرة ٣٨ أن قياس الشئ هو مقارنته بشئ من نوعه معلوم المقدار يسمى وحدة

ووحدة الاحجام هى المكعب وهو جسم محاط بستة مربعات متساوية ضلع كل منها وحدة الاطوال

مثل المكعب ا ب ح د ه و ز ح (شكل ٢٣)

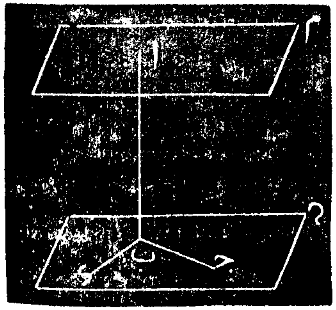


(ش ٢٣)

ومن الواضح أنه يتعذر تطبيق وحدة الاجسام على الجسم المراد تقديره تطبيقا عمليا ولهذا بحث علماء الهندسة عن طرق بها استعاضوا قياس الاجسام بقياس أبعاد خصوصية فى كل شكل واجراء عمليات عليها للحصول على مقدار حجم الجسم المطلوب

وسنذكر أشهر أنواع الاجسام مع بيان كيفية أخذ مساحاتها وقبل ذلك نذكر تعاريف ضرورية تتعلق بالسطوح والخطوط فنقول

(١٠٢) المستقيم يكون عمودا على المستوى متى كان عمودا على جميع الخطوط المستقيمة التى تمر بموقعه فى ذلك المستوى وموقع العمود هو نقطة تقابله بالمستوى مثل المستقيم ا ب بالنسبة للمستوى ى (شكل ٢٤) ونقطة ب تسمى موقع العمود



(ش ٢٤)

ومتى كان مستقيم عمودا على مستقيمين مارين من موقعه فى مستو فانه يكون عمودا على كل مستقيم يمر بموقعه فيه وحينئذ فيكون عمودا على المستوى

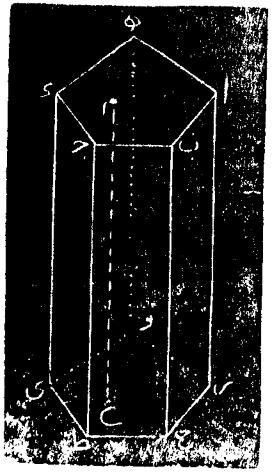
ومن هنا يستنتج أنه يكتفى فى تعامد المستقيم على مستو بكونه عمودا على مستقيمين مارين بموقعه فيه

(١٠٣) المستويان المتوازيان هما اللذان لا يتقابلان مهما امتدا مثل المستويين م و ى (شكل ٢٤)

(١٠٤) الاجسام الكثيرة السطوح جملة أنواع يتميز منها المنشور والهرم

المنشور

(١٠٥) المنشور هو جسم كثير السطوح فيه وجهان متقابلان متساويان ومتوازيان يسميان قاعدتيه وباقى أوجهه متوازيات أضلاع مثاله المنشور ا ب ح د ه و ز ع ط ى (شكل ٢٥) وقد يقرأ بقطر مثل ا ى والمضلعان ا ب ح د ه و و ز ع ط ى هما قاعدتاه



(ش ٢٥)

(١٠٦) ارتفاع المنشور هو العمود النازل من نقطة من القاعدة العليا على مستوى القاعدة السفلى

مثاله المستقيم م ع (شكل ٢٥)

(١٠٧) المنشور القائم هو ما كانت أضلاعه أعمدة على مستوى القاعدة

(١٠٨) يسمى المنشور بحسب أضلاع قاعدته فالمنشور الذى قاعدته مثلث يسمى منشورا ثلاثيا والذى قاعدته شكل رباعى يسمى منشورا رباعيا والذى قاعدته مخمس يسمى منشورا خماسيا

(١٠٩) حجم المنشور يساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه فحجم المنشور أ ى شكل ٢٥ يساوى حاصل ضرب سطح قاعدته أ ب حـ ء هـ فى ارتفاعه م ع

فاذا فرض أن سطح القاعدة يساوى ٤٫٥ أمتار وارتفاعه ٦ أمتار فتكون مساحته تساوى ٤٫٥ × ٦ = ٢٧ مترا مكعبا

واذا رمز لحجم المنشور بحرف ح ولقاعدته بحرف ن ولارتفاعه بحرف ع فينتج القانون ح = ن × ع (١٤)

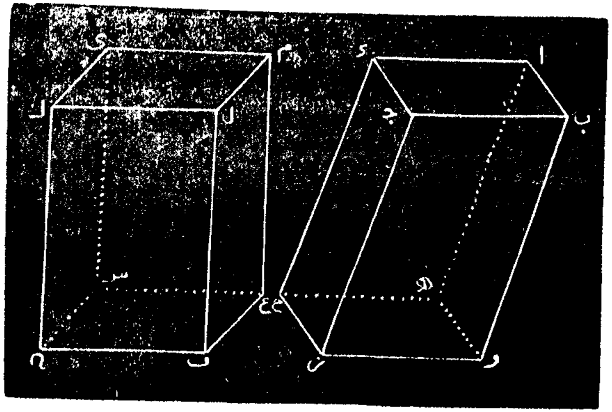
(١١٠) المساحة السطحية الجانبية للمنشور تساوى مجموع مساحات أوجهه الجانبية

ومساحته السطحية الكلية تساوى مساحته السطحية الجانبية مضافا اليها مساحة القاعدتين

(١١١) يتميز من المنشور الرباعى أنواع وهى متوازى السطوح ومتوازى المستطيلات والمكعب

(١١٢) متوازى السطوح هو منشور قاعدته شكل متوازى الاضلاع

مثل متوازى السطوح أ ز (شكل ٢٦)



(شكل ٢٦)

(١١٣) متوازى المستطيلات هو منشور جميع أوجهه مستطيلات مثل متوازى المستطيلات م ن (شكل ٢٦)

(١١٤) المكعب هو منشور جميع أوجهه مربعات مثل المكعب أ و (شكل ٢٣)

(١١٥) تؤخذ المساحات السطحية والحجمية لكل من متوازى السطوح ومتوازى المستطيلات والمكعب بالطرق التى أخذت بها المساحات السطحية والحجمية للمنشور على وجه العموم غير أننا نذكر الطالب بأنه حيث كانت قاعدة متوازى المستطيلات مستطيلا وارتفاعه هو أحد أحرفه العمودية على القاعدة فيكون أولا ـ مساحته الحجمية تساوى حاصل ضرب أبعاده الثلاثة فى بعضها

ثانيا ـ مساحته السطحية الجانبية تساوى حاصل ضرب محيط قاعدته فى ارتفاعه

فمساحة متوازى المستطيلات م ن (شكل ٢٦) تساوى حاصل ضرب ابعاده الثلاثة ف ن ، ع ف ، ل ف فى بعضها

فاذا فرض أن ف ن = ١٢ م ، ف ع = ٠ر٦٠ م ، ل ف = ٥ أمتار يكون حجم م ن = ١٢ × ٠ر٦٠ × ٥ = ٣٦ مترا مكعبا ويكون سطحه الجانبي يساوى محيط قاعدته أى ٢٥ر٢٠ فى ارتفاعه ٥ أى ١٢٦ مترا مربعا

أما مساحته السطحية الكلية فتساوى مساحته الجانبية ١٢٦ مترا مربعا مضافا اليها مساحة القاعدتين أى ٢ × ١٢ × ٠ر٦٠ = ١٤ر٤ مترا مربعا أعنى مساحته الجانبية هى ١٤٠ر٤٠ مترا مربعا

ملحوظة ـ يمكن تطبيق ماذكر بخصوص المساحات السطحية والحجمية لمتوازى المستطيلات على المكعب غير أنه لما كانت أبعاد المكعب كلها متساوية فينتج

أولا ـ أن مساحته الحجمية تساوى مكعب ضلعه

ثانيا ـ أن مساحته السطحية الجانبية تساوى أربعة أمثال مربع ضلعه

ثالثا ـ أن مساحته السطحية الكلية تساوى ٦ أمثال مربع ضلعه

فاذا فرض أن ضلع مكعب يساوى خمسة أمتار يكون حجمه يساوى $٥^٣$ أى ١٢٥ مترا مكعبا وسطحه الجانبي يساوى ٤ × $٥^٢$ = ١٠٠ متر مربع وسطحه الكلى = ٦ × $٥^٢$ = ١٥٠ مترا مربعا

(١١٦) المساحة السطحية الجانبية لأىّ منشور قائم تساوى حاصل ضرب محيط قاعدته فى ارتفاعه

(تمرينات)

(١) مامساحة منشور خماسى قاعدته ١٢٨ مترا مربعا وارتفاعه ٧ أمتار

(٢) مامساحة متوازى المستطيلات الذى أبعاده ١٩ مترا و ٠ر٥٠ م و ٦ أمتار

(٣) حجرة طولها من الداخل ٦ أمتار وعرضها ٤ر٥ أمتار وارتفاعها ٤ر٧٥ م يراد بياضها مامقدار المصاريف على حساب المتر المربع $\frac{ص}{٢ر٢٥}$ ومعلوم أن بهانوافذ يبلغ سطحها عشرة أمتار

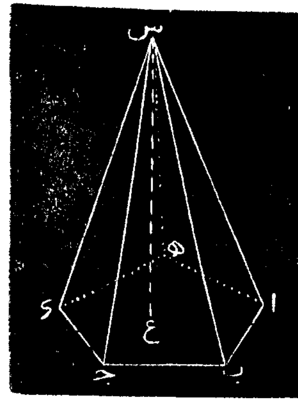
(٤) حائط طوله ٣٠ متر وسمكه ٠ر٧٥ م وارتفاعه ٥ أمتار على كم متر مكعب يشتمل هذا الحائط

(٥) أحجار على شكل مكعب ضلعه ١ر٥ م فكم مترا مكعبا من الحجر تشتمل هذه الاحجار

الهرم

(١١٧) الهرم هو جسم محاط بجملة مثلثات مجتمعة الرأس

فى نقطة واحدة تسمى رأس الهرم وتنتهى قواعدها بمضلع يسمى قاعدة الهرم



مثل الهرم س ا ب ح د ه (شكل ٢٧) فنقطة س تسمى رأس الهرم والمضلع ا ب ح د ه هو قاعدة الهرم

(١١٨) ارتفاع الهرم هو العمود النازل من رأسه على مستوى قاعدته مثل المستقيم س ع (شكل ٢٧)

(شكل ٢٧)

(١١٩) الهرم المنتظم هو ما كانت قاعدته مضلعا منتظما وارتفاعه يمر بمركز القاعدة

(١٢٠) المساحة الجمية للهرم تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ثلث ارتفاعه

فساحة الهرم س ا ب ح د ه و (شكل ٢٧) تساوى حاصل ضرب قاعدته ا ب ح د ه و فى ثلث ارتفاعه س ع فاذا كان سطح القاعدة يساوى ١٢٫٥ م وارتفاعه ٤٫٢٥ م يكون حجمه يساوى $\frac{١٢٫٥\times ٤٫٢٥}{٣} = ١٧٫٧٠٨٣٣٣٣$ مترا مكعبا

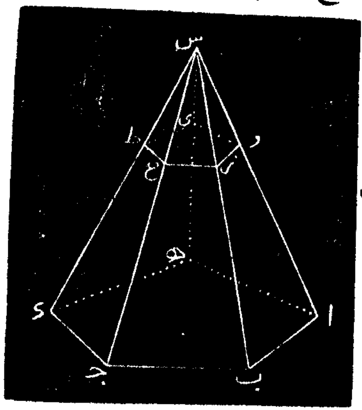
اذا رمز لحجم الهرم بحرف ح والقاعدته بحرف ں ولارتفاعه بحرف ع فيكون $ح = \frac{١}{٣}$ ں ع (١٥)

(١٢١) السطح الجانبى للهرم يساوى مجموع مساحات المثلثات

المحيطة به والسطح الكلى للهرم يساوى مجموع مساحات أوجهه

(الهرم الناقص)

(١٢٢) الهرم الناقص – اذا قطع الهرم بمستو موازلقاعدته وحذف مافوق المستوى القاطع فالجسم الحادث يسمى هرما ناقصا فاذا قطع الهرم س ا ب ح د ه (شكل ٢٨) بمستو مثل و ز ح ط ى مواز للقاعدة وحذف مافوق المستوى القاطع (وهو الهرم الصغير) فان الباقى يسمى هرما ناقصا



(ش ٢٨)

(١٢٣) ارتفاع الهرم الناقص هو العمود المحصور بين المستويين المتوازيين

(١٢٤) المساحة الجمية للهرم الناقص تكافئ ثلاثة أهرام يشترك فيها ارتفاع الهرم الناقص وقواعدها هى القاعدة العليا والسفلى والوسط المتناسب بينهما

فاذا فرض فى الهرم المذكور أن القاعدة ا ب ح د ه = ٩ أمتار مربعة وان القاعدة و ز ح ط ى = ٤ أمتار مربعة والارتفاع = ٥ أمتار فان مساحة الهرم تساوى $\frac{٩\times٥}{٣} + \frac{٤\times٥}{٣} + \frac{٥\sqrt{٤\times٩}}{٣}$ أو $= \frac{٥}{٣}(٩ + ٤ + \sqrt{٤\times٩}) =$

$\frac{٥}{٣} \times ١٩ = \frac{٩٥}{٣} = ٣١٫٦٦٦$ مترا مكعبا

اذا رمز لحجم الهرم بحرف ح ولاحدى قاعدتيه بحرف ن وللقاعدة الاخرى بحرف نَ ولارتفاعه بحرف ع فيكون

$$ح = \frac{١}{٣} ع (ن + نَ + \sqrt{ن نَ}) \quad (١٦')$$

(١٢٥) المساحة السطحية الجانبية للهرم الناقص تساوى مجموع مساحات أوجهه الجانبية

والمساحة السطحية الكلية له تساوى مجموع مساحات جميع أوجهه أى تساوى مساحته الجانبية مضافا اليها مساحة القاعدتين

(تمرينات)

(١) ما المساحة الحجمية لهرم مساحة قاعدته ١٦٢ مترا مربعا وارتفاعه ١٥ مترا

(٢) ما المساحة الحجمية لهرم قاعدته مثلث متساوى الاضلاع ضلعه ٦ أمتار وارتفاع الهرم ٩ أمتار

(٣) ما المساحة الحجمية لهرم ناقص مساحة احدى قاعدتيه ٢١٥ مترا ومساحة القاعدة الاخرى ١٠٠ متر وارتفاعه ١٥ متر

(٤) ما المساحة الحجمية لهرم ناقص احدى قاعدتيه مربع ضلعه ١٠ أمتار وقاعدته الاخرى مربع ضلعه ٤ أمتار وارتفاع الهرم (الناقص) ٦ أمتار

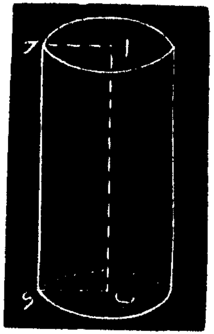
(٥) هرم الجيزة الاكبر قاعدته مربع ضلعه ٢٣١ مترا وارتفاع الهرم ١٤٦ مترا فما يكون حجمه

(فى الاجسام المستديرة)

(١٢٦) الاجسام المستديرة هى الاسطوانة والمخروط والكرة

(الاسطوانة)

(١٢٧) الاسطوانة القائمة هى جسم محاط بسطح منحن وبدائرتين متساويتين ومتوازيتين تسميان قاعدتى الاسطوانة وتتولد من دوران مستطيل مثل ا ب د حـ (شكل ٢٩) حول الضلع ا ب فالضلع حـ د يرسم السطح الجانبى للاسطوانة ويسمى الراسم والضلعان ا حـ ، د ب يرسمان قاعدتى الاسطوانة والمستقيم ا ب يسمى محور الاسطوانة



(ش ٢٩)

(١٢٨) المساحة الحجمية للاسطوانة القائمة تساوى سطح قاعدتها فى طول الراسم

فاذا كان (فى شكل ٢٩) ب د = ٠٫٥ م ، حـ د = ٢ م فان سطح القاعدة يكون مساويا ٠٫٧٨٥٠ من المتر المربع والمساحة الحجمية تساوى $٠٫٧٨٥٠ \times ٢ = ١٫٥٧٠$ مترا مكعبا

واذا رمز لحجم الاسطوانة بحرف ح ولنصف قطر القاعدة بالرمز س وللارتفاع بحرف ع يكون $ح = ط س^{٢} ع$ (١٧)

(١٢٩) السطح الجانبى للاسطوانة يساوى محيط قاعدتها فى طول الراسم

فاذا كان (فى شكل ٢٩) ا ء = ٥ر٠ م ، ح ء = ٢ م فان محيط القاعدة يكون مساويا ١٤ر٣ م وسطحها الجانبى يساوى

١٤ر٣ × ٢ = ٢٨ر٦ مترا مربعا

واذا رمز لسطحها بحرف سـ ولنصف قطر القاعدة بالرمز س والارتفاع بحرف ع يحدث سـ = ٢ ط س ع (١٧)

(١٣٠) السطح الكلى للاسطوانة يساوى سطحها الجانبى مضافا اليه مساحة القاعدتين

فمساحة السطح الكلى للاسطوانة السابقة يساوى

٢٨ر٦ + ٢ × ١٤ر٣ × ٢٥ر٠ = ٨٥ر٧ مترا مربعا

واذا رمز للسطح الكلى بحرف صـ ولنصف قطر القاعدة بالرمز س وللارتفاع بحرف ع يكون صـ = ٢ ط س ع + ٢ ط س٢ = ٢ ط س (ع + س) (١٨)

تمرينات

(١) عمود اسطوانى ارتفاعه خمسة أمتار ومحيط قاعدته ٥ر١ م يراد طلاؤه بالبويه فما مقدار تكاليف ذلك على حساب المتر ٢٥ مليما

(٢) اذا كان السطح الكلى لاسطوانة يساوى ٣ أمتار مربعة وكان نصف قطر قاعدتها ٢٠ر٠ متر فما يكون ارتفاعها

(٣) اذا لزم لطلاء السطح الجانبى لاسطوانة قطر قاعدتها ٢٠ر٠ م

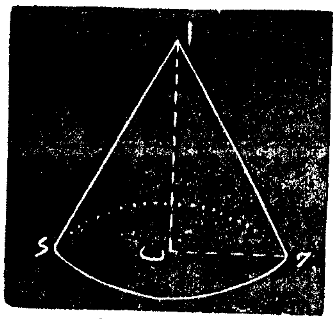
وارتفاعها ٨٠ر٠ متر مقدار سنتمترين مكعبين من الذهب فما يكون سمك طبقة الطلاء

(٤) ماحجم بناء بئر ارتفاعها ٥ امتار وقطرها الخارجى ٦٠ر١ م والداخلى ٦٠ر٠ متر

(٥) مامقدار وزن الماء الموجود فى فسقية أسطوانية الشكل ارتفاعه ٨٠ر٠ م وقطر قاعدتها متر واحد (بفرض ان الماء مقطر)

المخروط

(١٣١) المخروط هو جسم محاط بسطح منحن وينتهى من أحد طرفيه بدائرة ومن الطرف الآخر بنقطة ويتولد المخروط من دوران مثلث قائم الزاوية مثل ا ب ح (شكل ٣٠) حول أحد ضلعى القائمة ا ب فالضلع ا ب يسمى المحور والضلع ا ح يرسم السطح الجانبى للمخروط والضلع ح ب يرسم قاعدة المخروط



(ش ٣٠)

(١٣٢) مساحة السطح الجانبى للمخروط تساوى حاصل ضرب محيط قاعدته فى نصف الراسم

فاذا كان (فى شكل ٣٠) ب ح = ٣ر٠ م ، ا ح = ٥ر٠ م كان محيط القاعدة ١٨٨٤ر١ متر وحينئذ فسطحه الجانبى يساوى

١٫٨٨٤ × ٠٫٢٥ = ٠٫٤٧١٠ من المتر المربع
اذا رمز بحرف س للسطح الجانبى للمخروط وبحرف ح للراسم وبالرمز ں لنصف قطر القاعدة فيكون

س = ط ں ح (١٩)

(١٣٣) مساحة السطح الكلى للمخروط تساوى سطحه الجانبى مضافا اليه مساحة القاعدة
فاذا كان (فى شكل ٣٠) ب ح = ٠٫٣ م و ا ح = ٠٫٥ م يكون مساحة السطح الجانبى = ٠٫٤٧١٠ من المتر المربع كما تقدم وتكون مساحة القاعدة ٠٫٢٨٢٦ من المتر المربع وحينئذ فمساحة السطح الكلى للمخروط تكون ٠٫٧٥٣٦ من المتر المربع
واذا رمز بحرف س للمساحة السطحية الكلية لمخروط وبحرف ح للراسم وبالرمز ں لنصف قطر القاعدة فيحدث القانون

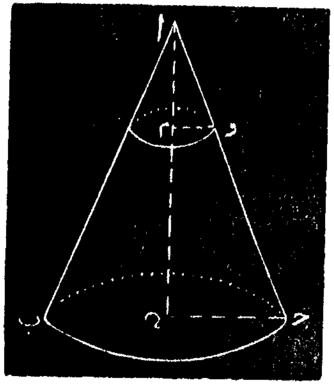
س = ط ں (ح + ں) (٢٠)

(١٣٤) حجم المخروط يساوى حاصل ضرب قاعدته فى ثلث ارتفاعه
فاذا فرض فى المخروط ا ح د (شكل ٣٠) أن ب ح = ٠٫٣ متر و ا ب = ٠٫٤ متر كان سطح قاعدته = ٣٫١٤ × ٠٫٣² = ٠٫٢٨٢٦ وحجمه يساوى $\frac{٠٫٢٨٢٦ \times ٠٫٤}{٣}$ ٠٫٠٣٧٦٨ من المتر المكعب
واذا رمز لحجم المخروط بحرف ح ولارتفاعه بحرف ع ولنصف قطر القاعدة بالرمز ں فيوجد أن

ح = $\frac{١}{٣}$ ط ں² ع (٢١)

المخروط الناقص

(١٣٥) اذا قطع مخروط بمستو مواز لقاعدته وحذف مافوق المستوى القاطع فالجسم الحادث يسمى مخروطا ناقصا
فاذا قطع المخروط ا ب ح (شكل ٣١) بمستو مواز لقاعدته مثل د هـ و وحذف مافوق المستوى القاطع فالجسم الباقى هو المخروط الناقص ويتولد المخروط الناقص من دوران شبه منحرف قائم الزاويتين مثل و م ن ح حول الضلع العمودى على القاعدتين وهو م ن فالمستقيم و ح يرسم السطح الجانبى للمخروط الناقص



(ش ٣١)

ويسمى راسم المخروط أو حرفه والمستقيمان ح ن و م و يرسمان دائرتين مستوياهما عمودان على المحور م ن ويسميان قاعدتيه

(١٣٦) ارتفاع المخروط الناقص هو العمود المحصور بين قاعدتيه مثل م ن

(١٣٧) المساحة السطحية الجانبية للمخروط الناقص تساوى نصف الحاصل من ضرب مجموع محيطى قاعدتيه فى حرفه الجانبى
فاذا كان (فى شكل ٣١) و م = ٠٫٧٥ و ح ن = ٣ أمتار و

و ح = ٣٫٧٥ فان محيط و م يساوى ٤٫٧١ م ومحيط ح ن يساوى ١٨٫٨٤ وبناء على ذلك فسطح ى و ح ب = $\frac{(٤٫٧١ + ١٨٫٨٤) \times ٣٫٧٥}{٢}$ = ٤٤٫١٥٦٢٥٠ مترا مربعا

(١٣٨) المساحة السطحية الكلية للمخروط الناقص تساوى مساحته السطحية الجانبية مضافا اليها مساحة القاعدتين

فلايجاد المساحة السطحية الكلية للمخروط الناقص ب ى و ح (شكل ٣١) باعتبار الابعاد السابقة نبحث عن مساحته السطحية الجانبية فنجد أنها كما تقدم تساوى ٤٤٫١٥٦٢٥٠ ثم نبحث عن مساحة القاعدتين فنجد أن التى نصف قطرها ح ن = ٢٨٫٢٦ والتى نصف قطرها و م = ١٫٧٦٦٢٥٠ وحينئذ فالمساحة السطحية الكلية تساوى ٤٤٫١٥٦٢٥٠ + ٢٨٫٢٦ + ١٫٧٦٦٢٥٠ = ٧٤٫١٨٢٥ مترا مربعا

(١٣٩) المساحة الجمية للمخروط الناقص تكافئ حجم ثلاثة مخاريط يشترك فيها ارتفاع المخروط الناقص وقواعدها هى قاعدتا المخروط والوسط المتناسب بينهما

فلايجاد حجم المخروط ى و ح ب (شكل ٣١) نبحث عن مساحة ثلاثة مخاريط ارتفاع كل منها م ن وقاعدة الاول دائرة ح ن وقاعدة الثانى دائرة و م وقاعدة الثالث دائرة تكون وسطا متناسبا بين هاتين الدائرتين

فاذا أبقينا المقادير السابقة وفرضنا ان الارتفاع م ن = ٣ أمتار نجد أن دائرة ح ن = ٢٨٫٢٦ م م ودائرة و م = ١٫٧٦٦٢٥٠ م م

وحينئذ فالدائرة التى تكون وسطا متناسبا بينهما تساوى

$\sqrt{٢٨٫٢٦ \times ١٫٧٦٦٢٥٠} = ٧٫٠٦٥٠$ مترا مربعا

وحينئذ فالمساحة الجمية للمخروط الناقص ى و ح ب تساوى

$\frac{٢٨٫٢٦ + ١٫٧٦٦٢٥٠ + ٧٫٠٦}{٣} \times ٣ = ٣٧٫٠٩١٢٥٠$ مترا مكعبا

واذا رمز لنصف قطر إحدى القاعدتين بالرمز س والثانية بالرمز س َ وللارتفاع بحرف ع وللمساحة الجمية بحرف ح يحدث

$$\text{ح} = \frac{\text{ع}}{٣}\,\text{ط}\,\text{س}^{٢} + \frac{\text{ع}}{٣}\,\text{ط}\,\text{س}'^{٢} + \frac{\text{ع}}{٣}\sqrt{\text{ط}\,\text{س}^{٢} \times \text{ط}\,\text{س}'^{٢}} \quad \text{أو}$$

$$\text{ح} = \frac{١}{٣}\,\text{ط}\,\text{ع}\,(\text{س}^{٢} + \text{س}'^{٢} + \text{س}\,\text{س}') \qquad (٢٢)$$

تمرينات

(١) ما المساحة السطحية الجانبية لمخروط نصف قطر قاعدته ١٫٥ وحرفه الجانبى ٢٫٥ متر

(٢) ما المساحة الجمية لمخروط نصف قطر قاعدته ١٫٥ وارتفاعه متران

(٣) ما المساحة الجمية لمخروط محيط قاعدته ٦٫٢٨ وارتفاعه ثلاثة أمتار

(٤) ما المساحة السطحية الكلية للمخروط المتولد من دوران مثلث قائم الزاوية أضلاعه ٦ م و ٨ م و ١٠ م بفرض دورانه حول الضلع الذى طوله ٨ أمتار

(٥) ما المساحة الجمية لمخروط متولد من دوران مثلث قائم الزاوية

أضلاعه ٦ م ، ٨ م ، ١٠ م بفرض دورانه حول الضلع الذى طوله ٦ أمتار

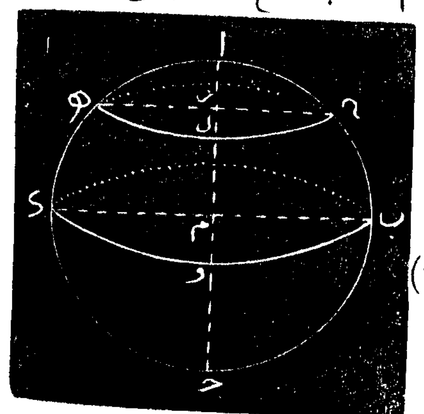
(٦) ما المساحة السطحية الجانبية لمخروط ناقص نصفا قطرى قاعدتيه ٠ر٣ م و ٠ر٦ م وحرفه الجانبى ٠ر٥

(٧) ما المساحة السطحية الكلية لمخروط ناقص نصفا قطرى قاعدتيه ٠ر٣ م ، ٠ر٦ م وحرفه الجانبى ٠ر٥ م

(٨) ما المساحة الجسمية لمخروط ناقص حادث من دوران شبه منحرف قائم الزاويتين ضلعاه المتوازيان ٢ م ، ٣ م وارتفاعه ١ر٥ م

الكره

(١٤٠) الكرة هى جسم محاط بسطح منحن جميع نقطه على أبعاد متساوية من نقطة داخلة تسمى مركز الكرة وتتولد من دوران نصف دائرة مثل ا ب ح (شكل ٣٢) حول القطر ا ح فالجسم المتولد من ذلك هو الكرة



(ش ٣٢)

والسطح المتولد من دوران نصف المحيط هو سطح الكرة ونقطة م هى مركز الكرة

(١٤١) اذا قطعت الكرة بمستو فان شكل القطع يكون دائرة فاذا مر المستوى القاطع بمركز الكرة فالدائرة الحادثة تسمى دائرة عظيمة مثل الدائرة د و ب واذا لم يمر المستوى القاطع بمركز الكرة فالدائرة الحادثة تسمى دائرة صغيرة مثل هـ ل ك

(١٤٢) نصف قطر الكرة هو مستقيم واصل من مركزها الى أى نقطة من سطحها مثل المستقيم م ك (شكل ٣٢)

(١٤٣) قطر الكرة هو مستقيم يمر بمركزها وينتهى بنقطتين من سطحها مثل المستقيم ا ح

انصاف أقطار الكرة متساوية وكذلك الاقطار

(١٤٤) نقطتا نهايتى القطر الذى يكون عمودا على مستوى دائرة عظيمة أو صغيرة تسميان قطبى هذه الدائرة

فالنقطتان ا ، ح اللتان هما نهايتا القطر ا ح العمودى على مستوى الدائرة د و ب هما قطبا هذه الدائرة

ومن الواضح ان هذين القطبين يصلحان أن يكونا قطبى أى دائرة موازية للدائرة د و ب مثل هـ ل ك

(١٤٥) المساحة السطحية للكرة تساوى سطح أربع دوائر عظيمة من دوائرها

فاذا فرض أن نصف قطر الكرة يساوى ١ر٥ م فان سطح هذه الكرة يساوى ٤ × ٣ر١٤ × ١ر٥^{2} = ٨٢ر٢٦ مترا مربعا

واذا رمز لنصف قطر الكرة بالرمز س ولسطحها بحرف س يكون

س = ٤ ط $س^{٢}$ (٢٣)

(١٤٦) حجم الكرة يساوى مساحة سطحها فى ثلث نصف القطر فاذا فرض ان نصف قطر كرة يساوى ٥ر١ م فان سطح هذه الكرة يساوى ٢٦ر٢٨ مم كما تقدم وحجمها يساوى ٢٦ر٢٨ × $\frac{١ر٥}{٣}$ = ١٣ر١٤ مترا مكعبا واذا رمز لنصف قطر الكرة بالرمز س وحجمها بحرف ح يكون

ح = ٤ ط $س^{٢}$ × $\frac{س}{٣}$ أو

ح = $\frac{٤}{٣}$ ط $س^{٣}$ (٢٤)

و يؤخذ من هذا القانون أنه يمكن ان يعبر عن المساحة الجمية للكرة بأنها تساوى أربعة أثلاث النسبة التقريبية فى مكعب نصف القطر

واذا جعل ق رمزا لقطر الكرة كان نصف القطر عبارة عن $\frac{ق}{٢}$ ومكعبه $\frac{ق^{٣}}{٨}$ وبوضع هذا المقدار بدلا عن $س^{٣}$ والاختصار يحدث

ح = $\frac{١}{٦}$ ط $ق^{٣}$ (٢٥)

ومن هذا القانون يؤخذ أن المساحة الجمية للكرة تساوى سدس النسبة التقريبية فى مكعب القطر

(تمرينات)

(١) ما المساحة السطحية والجمية لكرة قطرها متر واحد

(٢) ما المساحة السطحية للكرة الارضية من بعد معرفة ان نصف قطرها ٦٣٦٦ كيلو متر

(٣) ما المساحة الجمية للكرة الارضية من بعد معرفة أن

نصف قطرها ٦٣٦٦ كيلومتر

(٤) نصف قطر القمر يعادل $\frac{٣}{١١}$ بالنسبة لنصف قطر الارض الذى هو عبارة عن ٦٣٦٦ كيلومتر فما مقدار سطح القمر

(٥) ما حجم القمر من بعد معرفة ان نصف قطره يعادل $\frac{٣}{١١}$ من نصف قطر الارض الذى هو عبارة عن ٦٣٦٦ كيلومتر

المنطقة

(١٤٧) المنطقة هى جزء من سطح الكرة محصور بين مستويين متوازيين قاطعين لها والبعد بينهما يسمى ارتفاع المنطقة مثل السطح المحصور بين المستويين المتوازيين ى هـ ، ب د (شكل ٣٢) وتتولد المنطقة من دوران قوس مثل ب ى حول القطر ا ح بأن ينزل من نقطتى ى ، ب عمودان على القطر ثم يتصور دوران الشكل ر ى ب م حول القطر ا ح فالقوس ى ب يرسم المنطقة وأما المستقيمان ر ى ، ب م فيرسمان دائرتين هما قاعدتا المنطقة والبعد م ر هو ارتفاع المنطقة

(١٤٨) مساحة المنطقة تساوى حاصل ضرب محيط دائرة عظيمة (من دوائر الكرة المرسوم عليها المنطقة) فى الارتفاع فاذا فرض ان ارتفاع المنطقة وهو م ر = ٩٧٥ر٠ متر وان نصف قطر الكرة يساوى ٥ر١ فيكون مساحة الدائرة العظيمة يساوى ٢ × ١٤ر٣ × ٥ر١ = ٤٢ر٩ وبضرب هذا الناتج فى الارتفاع وهو ٩٧٥ر٠ ينتج ٩ر١٨٤٥ مترا مربعا وهو مساحة المنطقة

واذا رمز لارتفاع المنطقة بحرف ع ولنصف قطر الكرة بالرمز س واسطح المنطقة بالحرف سـ فيحدث

سـ = ٢ ط س ع (٢٦)

القطعة الكرويه

(١٤٩) القطعة الكروية هى جزء من حجم الكرة محصور بين مستويين متوازيين قاطعين لها يسميان قاعدتى القطعة الكروية والبعد بينهما هو ارتفاعها

مثل الجسم المحصور بين المستويين المتوازيين ن هـ و ب د (شكل ٣٢)

وتتولد القطعة من دوران الشكل ر ن ب م (شكل ٣٢) حول القطر ا ح فالمستقيمان ر ن و ب م يرسمان دائرتين هما قاعدتا القطعة الكرويه والبعد ر م هو ارتفاعها

(١٥٠) مساحة القطعة الكروية تساوى نصف مجموع مساحتى قاعدتيها مضروبا فى ارتفاعها مضافا الى ذلك حجم كرة قطرها الارتفاع المذكور

فساحة القطعة ن ب د هـ تساوى نصف مجموع مساحتى قاعدتيها وهى دائرة ب م ودائرة ر ن مضروبا فى الارتفاع م ر ومضافا الى ذلك حجم كرة يكون قطرها مساويا الى ر م

واذا فرض أن نصف قطر احدى القاعدتين ب م يساوى ١٫٥ م ونصف قطر القاعدة الاخرى ن ر = ١٫٢ م وارتفاعها م ر = ٠٫٩٧٥ م تكون مساحة القاعدة م ب = ٧٫٠٦٥ أمتار مربعة وتكون مساحة القاعدة ن ر = ٤٫٥٢١٦ أمتار مربعة

ونصف مجموع مساحتيهما ٥٫٧٩٣٣ أمتار مربعة وبضرب هذا الناتج فى الارتفاع وهو ٠٫٩٧٥ ينتج ٥٫٦٤٨٤٦٧٥ أمتار مكعبة وحجم الكرة التى قطرها ٠٫٩٧٥ = ٠٫٤٨٥٠٠٥٦٤٠٦٢٥ مترا مكعبا وباضافة الحجمين لبعضهما ينتج ٦٫١٣٣٥٢٣٩٠٦٢٥ أمتار مكعبة

واذا رمز لحجم القطعة بحرف ح ولنصف قطر احدى قاعدتيها بالرمز س ولنصف قطر القاعدة الثانية بالرمز سَ وللارتفاع بحرف ع فينتج القانون

$$\text{ح} = \frac{1}{2}\,\text{ط ع}\,(\text{س}^{2} + \text{سَ}^{2}) + \frac{1}{6}\,\text{ط ع}^{3} \qquad (٢٧)$$

(تمرينات)

(١) مامساحة منطقة ارتفاعها ٠٫٢ م مرسومة على كرة قطرها متر واحد

(٢) ماارتفاع منطقة مساحتها متر واحد مرسوم على كرة قطرها متر واحد (يبحث عن الارتفاع مقربا من ٠٫٠٠١)

(٣) مامقدار حجم قطعة كروية ارتفاعها ٠٫١ م ونصف قطر احدى قاعدتيها ٠٫٤٠ م ونصف قطر القاعدة الاخرى ٠٫٥ م

(٤) كرة قطعت بمستويين متوازيين كل منهما متباعد عن مركزها بمقدار ٠٫١٥ م وكان نصف قطر كل من القطعتين ٠٫٤٠ م والمطلوب حساب حجم القطعة الواقعة بين هذين المستويين

(٥) منطقة مساحتها متر مربع وارتفاعها ٠٫١٦ م والمطلوب تعيين مقدار نصف حجم الكرة وسطحها بتمامه

بحمد الله وحسن توفيقه قد انتهى ماأردنا جمعه فى هذا المختصر فجاء وافيا بالمرام والصلاة والسلام على أول الخلق وخاتم الرسل

فهرست المبادى والغايات فى أصول الهندسة والمساحات

(تمت)

80025 75540